Квантование э/м поля

Не знаю, как сейчас, а в мои времена говорили «квантованное электромагнитное поле» - это набор осциллятор. Прямо так и представляются пружинки в воздухе ☺ Естественно, это не как. А как на самом деле?

Разберёмся. Сразу говорю: нормально эта тема будет разбираться в 7-м семе, но коли кафедре атомки нужен ответ от вас уже в 5-м – что же, нам ПРИДЁТСЯ на каком-то уровне разобраться.

Оказывается, что решение классических ур-й Максвелла в свободном пространстве-времени можно записать как

$$\boldsymbol{A}(\vec{r},t)\sim\sum_{\vec{k},p}\left(\boldsymbol{c_k^-}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+\boldsymbol{c_k^+}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)$$

A – 4-потенциал, т.е. включает в себя и φ, и **A.**

p – поляризация. Опустим её для простоты:

$$\boldsymbol{A}(\vec{r},t)\sim\sum_{\vec{k}}\left(\boldsymbol{c_k^-}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+\boldsymbol{c_k^+}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)$$

Я также не пишу коэф пропорциональности, там какое-то месиво из 2π, c, так что ну его в пень, он нас не интересует.

Посмотрим на формулу Поле можно представить как суперпозицию синусоидальных волн по всем направлениям. Коэфы $\boldsymbol{c_k^-}$ и $\boldsymbol{c_k^+}$ как раз отражают их вклад.

Кстати, если вам так будет проще запомнить, запишем полностью через 4-вектора. Стрелочками будем обозначать 3-вектора, а жирным – 4-вектора.:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\sim\sum_{\boldsymbol{k}}\left(\boldsymbol{c_k^-}e^{i(\boldsymbol{kr})}+\boldsymbol{c_k^+}e^{i(\boldsymbol{kr})}\right)$$

А вот выглядит провантованное магнитное поле:

$$\widehat{\overline{A}}_{\Gamma.}(\overline{x},t)=\sum_{\overline{k},p}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k L^3}}\overline{e}_{\overline{k}p}\cdot\left(e^{i\overline{k}\overline{x}}\widehat{a}_{\overline{k}p}e^{-i\omega_k t}+e^{-i\overline{k}\overline{x}}\widehat{a}^{+}_{\overline{k}p}e^{i\omega_k t}\right)$$

4-вектор превратился в 4-векторный оператор. $\{\widehat{\varphi},\widehat{A_x},\widehat{A_y},\widehat{A_z}\}$ - операторы проекций 4-потенциала.

Очень похоже на классику! Только вместе цешек операторы рождения-уничтожения. Если у вас был квантэл в 4-м семестре, то вы должны про них слышать немного. А пока не морочьте голову, просто запомните, что они есть.

Тем самым мы провели процедуру квантования.
Определение. Процедурой квантования называется процесс, по которому каждому классическому состоянию ставится в соответствие одно или набор квантовых.

Так а откуда взялся этот миф про «набор гармонических осцилляторов»?
Давайте вернёмся к классике:

$$\boldsymbol{A}(\vec{r},t)\sim\sum_{\vec{k}}\left(\boldsymbol{c_k^-}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+\boldsymbol{c_k^+}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)$$

Вот, а теперь давайте найдём энергию.
Мысль 1: $\hat{E}=\frac{\hat{p}^2}{2m},\hat{p}\sim\frac{\partial\Psi}{\partial x}$. При первой производной по координате у нас вылезет k, поэтому получим энергию $\sim\sum_{\vec{k}}k^2$.

То, что мы получили бесконечность, не должно нас настораживать: тут потребуется перенормировка (для тех, кто не знает: долгая и невероятно противная процедура, которая делает из бесконечностей конечности). А вот что нас должно насторожить: мы не получили $\sum_{\vec{k}}k$. Ведь для гармонического осциллятора

$$E=\sum_n h\omega(n+\frac{1}{2})$$

Ну ½ нас не интересует (она исчезнет в процессе перенормировки), ω пропорционально k с коэфом пропорциональности c, так что должны мы получить сумму первых степеней!

Мысль 2: у нас же фотоны ультрарелятивистские, для них $E=pc,$ а вовсе не $\frac{p^2}{2m}$
Всё, пазл сошёлся, мы и получили сумму первых степеней $\sum_{\vec{k}}k$ - как в гармоническом осцилляторе!

Подведём итоги:
1) Квантованное э/м поле – это набор плоских синусоидальных волн, а вовсе не осцилляторов:

$$\boldsymbol{A}(\vec{r},t)\sim\sum_{\vec{k}}\left(\boldsymbol{c_k^-}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+\boldsymbol{c_k^+}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)$$

2) Процедурой квантования называется процесс, по которому каждому классическому состоянию ставится в соответствие одно или набор квантовых.
3) Миф про гармонические осцилляторы взялся, потому что для энергии получается формулы наподобие гармоническим осцилляторам.